spezielle Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Sei $v = v(z), z > 0$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen z und $u = u(x,t) = v(\frac{x^2}{t})$ für $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

a) Zeigen Sie: u genügt genau dann der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx},$$

wenn

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0, z > 0.$$

b) Zeigen Sie, daß die allgemeine Lösung der letzten Gleichung für v gegeben wird durch

$$v(z) = c * \int\limits_0^z e^{-\frac{1}{4}s} * s^{-\frac{1}{2}}\, ds + d$$

mit Konstanten c, d.

c) Differenzieren Sie $v(\frac{x^2}{t})$ nach x und bestimmen Sie die Konstante c so, daß der Wärmeleitungskern im $\mathbb{R}^1$ entsteht.